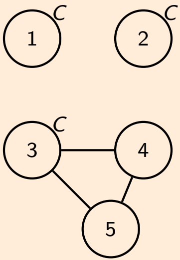
Strukturen: Beispiel

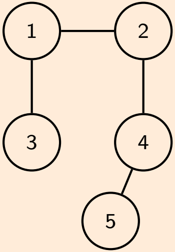
Sei $M_G = (D, S, \pi, \mu)$ mit

- $D = \{1, \ldots, 5\}$
- $S = \{w_1, w_2, w_3\}$
- Signatur-Funktion und Wahrscheinlichkeits-Verteilung.

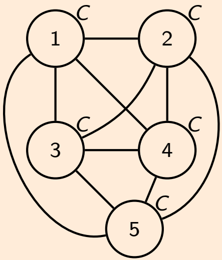
$$\pi(w_1)(E) = \{\{3,5\}, \{3,4\}, \{4,5\}, \{5,3\}\}$$
$$\pi(w_1)(C) = \{1, 2, 3\}$$
$$\mu(w_1) = 0.4$$



$$\pi(w_2)(E) = \{\{1,3\}, \{1,2\}, \{2,4\}, \{4,5\}\}$$
$$\pi(w_2)(C) = \emptyset$$
$$\mu(w_2) = 0.6$$



$$\pi(w_3)(E) = \{\{1,2\}, \{2,4\}, \{4,5\}, \{5,3\}\}^+$$
$$\pi(w_3)(C) = \{1, \ldots, 5\}$$
$$\mu(w_3) = 0$$



Syntax von *PropFO*

Seien $\mathbb{V}_O$ eine und $\mathbb{V}_F$ disjunkte abzählbare Variablenmengen

Definition 1 (Objekt-Terme $\mathbb{T}_O$)

Die Menge $\mathbb{T}_O$ der Objekt-Terme ist die kleinste Menge, so dass

- x $\qquad x \in \mathbb{V}_O$
- $f(t_1, \dots, t_n)$ $\qquad t_1, \dots, t_n \in \mathbb{T}_O$

Definition 2 (Feld-Terme $\mathbb{T}_F$)

Die Menge $\mathbb{T}_F$ der Objekt-Terme ist die kleinste Menge, so dass

- $\mathbf{0},\ \mathbf{1},\ x^f$ $\qquad x^f \in \mathbb{T}_F$
- $w(\varphi)$ $\qquad \varphi \in \mathit{PropFO}$
- $t_1 + t_2$ $\qquad t_1, t_2 \in \mathbb{T}_F$
- $t_1 \cdot t_2$ $\qquad t_1, t_2 \in \mathbb{T}_F$

Definition 3 (Syntax von *PropFO*)

Die Menge der *PropFO*Formeln ist die kleinste Menge mit

- $R(t_1, \dots, t_n)$ $\qquad t_1, \dots, t_n \in \mathbb{T}_O$
- $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ $\qquad \varphi_1, \varphi_2 \in \mathit{PropFO}$
- $\forall x\ \varphi$ $\qquad x \in \mathbb{V}_O,\ \varphi \in \mathit{PropFO}$
- $\neg\varphi$ $\qquad \varphi \in \mathit{PropFO}$
- $t_1 \leq t_2$ $\qquad t_1, t_2 \in \mathbb{T}_F.$
- $\forall x^f\ \varphi$ $\qquad x^f \in \mathbb{V}_F,\ \varphi \in \mathit{PropFO}.$

Die Syntax ist minimalistisch, aber...

- $\varphi_1 \vee \varphi_2 \ := \ \neg(\neg\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2)$
- $\exists\varphi \ := \ \neg\forall\neg\varphi$
- $t_1 = t_2 \ := \ t_1 \leq t_2 \wedge t_2 \leq t_2$
- ...

Wir erlauben z.B. auch $n \in \mathbb{N}$ als Feld-Terme, da

$$n := \underbrace{\mathbf{1} + \dots + \mathbf{1}}_{n \text{ mal}} \in \mathbb{T}_F$$

Semantik von *PropFO*-Formeln

Definition 4 (Typ-2-Semantik von *PropFO*-Formeln)

Sei $I = (M, s, \beta)$ mit $M = (D, S, \pi, \mu)$, dann definieren wir für $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{T}_O$, $f_1, f_2 \in \mathbb{T}_F$ und $\varphi, \varphi_1, \varphi_2 \in$*PropFO*:

$$\llbracket R(t_1, \ldots, t_n) \rrbracket_{(M,s,\beta)} = \pi(s)(R)(\llbracket t_1 \rrbracket_{(M,s,\beta)}, \ldots, \llbracket t_n \rrbracket_{(M,s,\beta)})$$

$$\llbracket \varphi_1 \wedge \varphi_2 \rrbracket_{(M,s,\beta)} = \llbracket \varphi_1 \rrbracket_{(M,s,\beta)} \wedge \llbracket \varphi_2 \rrbracket_{(M,s,\beta)}$$

$$\llbracket \neg \varphi \rrbracket_{(M,s,\beta)} = 1 - \llbracket \varphi \rrbracket_{(M,s,\beta)}$$

$$\llbracket \forall x \varphi \rrbracket_{(M,s,\beta)} = \begin{cases} 1 & \text{, für alle } d \in D \text{ gilt das } \llbracket \varphi \rrbracket_{(M,s,\beta[x/d])} = 1 \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

$$\llbracket t_1 \leq t_2 \rrbracket_{(M,s,\beta)} = \begin{cases} 1 & \text{, falls } \llbracket t_1 \rrbracket_{(M,s,\beta)} \leq \llbracket t_2 \rrbracket_{(M,s,\beta)} \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

$$\llbracket \forall x^f \varphi \rrbracket_{(M,s,\beta)} = \begin{cases} 1 & \text{, für alle } p \in [0,1] \text{ gilt das } \llbracket \varphi \rrbracket_{(M,s,\beta[x^f/p])} = 1 \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

Wir definieren die Modell-Relation wie üblich:

$$(M, w, \beta) \models \varphi \text{ gdw. } I = (M, w, \beta) \llbracket \varphi \rrbracket_{(M,w,\beta)} = 1$$

$$(M, w) \models \varphi \text{ gdw. für alle Belegungen } \beta \text{ gilt } \llbracket \varphi \rrbracket_{(M,w,\beta)} = 1$$

$$M \models \varphi \text{ gdw. für alle } w \in S \text{ gilt } (M, w) \models \varphi$$

Semantik von *PropFO*-Termen

Sei $I = (M, s, \beta)$ eine Typ-2-Interpretation mit $M = (D, S, \pi, \mu)$

Definition 5 (Typ-2-Semantik von *PropFO* Objekt-Termen)

Objekt-Terme werden als Domänen-Elemente interpretiert:

$$\llbracket x \rrbracket_{(M,s,\beta)} = \beta(x) \qquad (x \in \mathbb{V}_O)$$

$$\llbracket f(t_1, \dots, t_n) \rrbracket_{(M,s,\beta)} = \pi(s)(f)(\llbracket t_1 \rrbracket_{(M,s,\beta)}, \dots, \llbracket t_n \rrbracket_{(M,s,\beta)}) \qquad (t_1, \dots, t_n \in \mathbb{T}_O)$$

Definition 6 (Typ-2-Semantik von *PropFO* Feld-Termen)

Feld-Terme werden als Zahlen aus $\mathbb{R}$ interpretiert:

$$\begin{aligned}
\llbracket x^f \rrbracket_{(M,s,\beta)} &= \beta(x) && (x^f \in \mathbb{V}_F) \\
\llbracket \mathbf{0} \rrbracket_{(M,s,\beta)} &= 0 \\
\llbracket \mathbf{1} \rrbracket_{(M,s,\beta)} &= 1 \\
\llbracket t_1 + t_2 \rrbracket_{(M,s,\beta)} &= \llbracket t_1 \rrbracket_{(M,s,\beta)} + \llbracket t_2 \rrbracket_{(M,s,\beta)} \\
\llbracket t_1 \cdot t_2 \rrbracket_{(M,s,\beta)} &= \llbracket t_1 \rrbracket_{(M,s,\beta)} \cdot \llbracket t_2 \rrbracket_{(M,s,\beta)} \\
\llbracket w(\varphi) \rrbracket_{(M,s,\beta)} &= \mu(\{s' \in S \mid \llbracket \varphi \rrbracket_{(M,s',\beta)} = 1\}) && (\varphi \in \mathit{PropFO})
\end{aligned}$$