Hinweise zum Mathematik lernen

Kai Sauerwald und Christine Dahn

11. Februar 2014

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

In diesem Handout wollen wir Ihnen vermitteln, wie man an eine Aufgabe heran gehen und diese lösen könnte. So dass Sie (als Leser) ein Technik für die Herangehensweise an eine MafI Aufgabe entwickeln können. Wir laden dazu ein, die hier präsentierte Herangehensweise einmal auszuprobieren. Besonders wenn Mathe bis jetzt ein Buch mit sieben Siegeln für Sie war. Aber auch wenn Sie für sich selbst schon einen guten Weg gefunden haben, dies ist eine Gelegenheit seine eigene Lerntechnik mit einer anderen zu vergleichen. Jeder sollte während seines fortlaufenden Studiums immer wieder über seine persönliche Lerntechnik reflektieren und sie so verbessern. Die meisten Professoren und Mitarbeiter tun dies regelmäßig und von uns Studenten wird ebenfalls erwartet - auch wenn es niemand expliziert sagt - unsere Lerntechnik selbst zu finden und stetig zu verbessern.

`Achtung subjektiv!` Das Handout basiert auf subjektiven Erfahrungen (nicht wissenschaftlich fundiert) und erhebt entsprechend keinen Anspruch auf Allgemeingültigkeit oder Vollständigkeit. Das Handout ist nicht Teil der MafI 1 Vorlesung, Übungen oder des Tutoriums.

`Die Autoren:` Wir sind zwei Informatik Studenten an der Universität Dortmund. Wir betreuen beide seid mehreren Jahren Übungsgruppen zu verschiedensten Veranstaltungen unter anderem auch MafI. Die Erfahrungen, die wir im Rahmen unserer Tutorentätigkeit und im Verlauf unseres eigenen Studiums gesammlet haben, möchten wir Ihnen in diesem Handout präsentieren. Wir werden Sie in diesem Handout siezen, da wir Sie für fähige und erwachsene Menschen halten.

1 Allgemeines

Bevor wir uns der Lösungsstrategie einer Mathematik-Aufgabe widmen können, wollen wir in diesem Kapitel klären in welcher Umgebung und mit welchem Material Sie optimal lernen können.

1.1 Welcher Zeitaufwand wird von mir erwartet?

Die Leistung, die im Studium erbracht werden soll, wird in Creditpoints (kurz: CP) gemessen. Ein Creditpoint steht dabei für 30 Stunden Arbeitsaufwand eines durchschnittlichen Studenten. Die MafI 1 Veranstaltung ist mit 9 Creditpoints veranschlagt. Insgesamt ergibt sich damit ein Arbeitsaufwand von $30*9 = 270$ Stunden für die Veranstaltung. Bei 14 Wochen Vorlesung erwarten jeden MafI 1 Teilnehmer etwa $19 - 20$ Stunden Arbeitsaufwand pro Woche. Allerdings müssen Sie noch die Lernzeit für die Klausur einplanen. Arbeitet man gut im Semester mit, kann man von zwei Wochen Lernen ausgehen. Somit kostet die Lernphase $2 * 5 * 5 = 50$ Stunden. Für die Vorlesungszeit verbleiben 220 Stunden Arbeitsaufwand. Das ergibt etwa 16 Stunden pro Woche. Davon gehen vier an den Besuch der Vorlesung und zwei Stunden an den Besuch der Übung. Somit hätten sie jede Woche ein Zeitbudget von 10 Stunden zur Bearbeitung der Übungszettel und zur Nachbereitung der Vorlesung. So gut wie jeder, der von der Schule kommt, kann davon ausgehen, dass er noch kein durchschnittlicher Student ist.[1] Daher sollte Sie für sich im ersten Semester sogar noch etwas mehr Zeit einplanen. Diese Rechnung soll Ihnen klar machen, dass es durchaus normal ist, dass Sie eventuell ein bis zwei Tage für die Lösung eines Übungszettels brauchen.

1.2 Lernumgebung

Zunächst sollten Sie ihren Arbeitsplatz gut wählen. Wir schlagen dafür folgendes Setting vor:

Einen großen Tisch an dem Sie genug Platz haben, um Ihr Arbeitsmaterial auszubreiten. Unserer Erfahrung nach kann es sehr den Lernfluss stören, wenn man ständig Sachen umräumen muss. Alles, was man häufiger braucht, sollte sichtbar vor einem liegen.

[1] Das ist nicht Ihre Schuld. Die schulische Ausbildung ist einfach so schlecht.

Gute Ausleuchtung des Arbeitsplatzes empfehlen wir sehr: Arbeitet man drei oder mehr Stunden an einer Aufgabe, werden die Augen stark beansprucht. Dies kann man meiner Erfahrung nach mindern, indem Sie im direkten Sonnenlicht oder unter eine hellen Lampe arbeiten. Als Tipp können wir auch empfehlen vor einem Fenster zu arbeiten. Gelegentlich nach draußen zu blicken, zwingt die Augen den Fokus zu verändern und wirkt daher entspannend für die Augenmuskulatur. Nachteil davon kann sein, dass das Geschehen vor dem Fenster ablenkend wirkt.

Digitale Geräte ausschalten. Die Versuchung, eben bei Facebook, Twitter, Wikipedia und Co nachzuschauen, ist riesig. Sie müssen ehrlich zu sich selbst sein, was die Nutzung von Handy, Laptop und so weiter angeht. Wenn die Geräte für Sie eine zu große Gefahr zur Ablenkung sind, empfehlen wir Ihnen Handy und Laptop beim Lernen außer Reichweite zu bringen und sie auf lautlos zu schalten. Wenn Sie etwas nachschlagen müssen, schauen Sie zunächst ins Skript oder in die passende Literatur. Wenn es sich nicht vermeiden lässt mit dem Laptop zu arbeiten, dann schränken Sie sich selbst den Zugang zu Ablenkungen ein. Schalten Sie das Internet aus oder erstellen Sie einen extra Lernaccount, auf dem Seiten wie Twitter und Facebook gesperrt sind.

Umgebungsgeräusche vermeiden. Wenn Sie lernen, sollten Sie an einem ruhigen Ort lernen. Unserer Erfahrung nach kann Musik beim Lernen gewaltig die Laune heben, allerdings ist sie störend bei denk-intensiven Aufgaben. Daher meine Empfehlung: ohne Musik und ohne Filme lernen. Inbesondere wenn man mit mehreren zusammen lernt.

Kein Essen beim Lernen. Sie sollten vermeiden beim Lernen zu essen. Wenn Sie zu viel essen ist ihr Körper mit der Verdauung beschäftigt - weniger Sauerstoffzufuhr zum Gehirn. Meiner Erfahrung nach sind Süßigkeiten eine zwiespältige Sachen beim Lernen. Viel Zucker zu sich zu nehmen, birgt die Gefahr sich kurzfristig aufzupuschen, so dass man 1-2 Stunden gut lernen kann und dann in ein Tief fällt. Auch auf die Art von Zucker sollte man achten: Einfachzucker (Traubenzucker im Studentenfutter) wirkt anders als Mehrfachzucker (in Schokolade). Da die Einfachzucker vom Körper nicht groß verdaut werden müssen, geht der Zucker direkt übers Blut ins Gehirn und steht dort als Energie zu Verfügung. Daher ist Traubenzucker gut für eine kurze Klausur geeignet, jedoch nicht um länger zu lernen.

Nur Wasser beim Lernen trinken. Die meisten koffeinhaltigen Getränke (gerade Kaffee und Energydrinks) pushen einen nur über einen kurzen Zeitraum auf. Kein probates Mittel um mehr als 4 Stunden zu lernen.

1.3 Arbeitsmaterial

Sie müssen für sich selbst ausprobieren, wie Sie am besten mit dem Lernmaterial umgehen können. Einige Studenten drucken sich alles aus, andere notieren sich jede Definition und jeden Satz auf Karteikarten. Wobei wir Letzteres eher für das Auswendiglernen empfehlen würden und nicht für MafI 1. Insbesondere da es bei MafI 1 um Zusammenhänge geht, die sich schlecht auf Karteikarten abbilden lassen. Wir geben Ihnen hier einen Vorschlag, wie Sie mit dem Arbeitsmaterial arbeiten könnten: Es sollte alles ausgedruckt[2] vorliegen, damit man nicht ständig durch digitale Medien abgelenkt wird. Ausgedruckte Dokumente haben auch den Vorteil, dass man besser Notizen darin machen kann. Nebenbei sind ausgedruckte Materialien weniger anstrengend für die Augen. Aus selbigen Grund sollten die Dokumente nicht zu klein ausgedruckt werden und der Arbeitsplatz sollte gut ausgeleuchtet sein. Wenn Sie 4 Stunden über zu kleiner Schrift hängen, werden Ihnen irgendwann die Augen weh tun. In Abbildung 1.1 sehen Sie einen Vorschlag für die Aufteilung des Arbeitsplatzes.

Ausgedrucktes MafI 1-Skript Wie oben beschrieben, bietet ein Laptop oder Tablett die ständige Möglichkeit der Ablenkung. Ein weiterer Vorteil vom ausgedruckten Skript: man kann auf Papier besser Notizen machen.

Leeres Papier Wir selber arbeiten nur mit weißem unlinierten Papier und können dies nur empfehlen.[3] Es ist keine Struktur auf dem Papier vorgeben, die mich selber irritiert. Sie selber müssen allerdings ausprobieren, womit Sie am besten zurecht kommen. Vielleicht ist für Sie ein Bogen A3 Papier oder aber strukturiertes Millimeterpapier genau das Richtige. Egal mit welchem Papier Sie am besten zurecht kommen, Sie sollten Blätter für getrennte Aufgaben parat haben:

1. Definitionen und Sätze aus dem Skript notieren (temporärer Spickzettel)
2. Schmierblatt, um eine Idee zu verfolgen, Kurzrechnungen durchzuführen oder einfach mal zu krakeln, wenn Ihnen die Laune danach ist.[4]
3. Lösung notieren

Überlegen Sie sich wie Sie am besten Ordnung in das Chaos bekommen. Wir beschriften jedes Blatt mit einer Seitenzahl und tackern die Seiten zusammen. Vorne kommt dann der Titel drauf. Für größere Papiermengen sind Klemmschienen optimal. Manch einer schreibt aber auch in Hefte oder benutzt gelochtes Papier und heftet das Material in einem Hefter oder Ordner ab.

Ausgedruckte Übungszettel Hier gilt das Gleiche wie für das Skript. Drucken Sie das Material aus.

[2] Drucken kann man als Informatik Student günstig für 3 cent pro Seite über die Pool-Accounts der IRB. Druckquota gibt es bei der IRB (MSW16 1.Etage) nachzukaufen.

[3] Es war eine unglaubliche Erleichterung nicht mehr an diese Schulhefte gebunden zu sein. Es ist geradezu eine intellektuelle Befreiung auf unliniertem Papier zu schreiben.

[4] Kai hat schon ganze Zettel voller Kreise gemalt, wenn er über ein Problem nachgedacht hat.

Ausgedruckte alte Aufgaben und Lösungen Die alten Aufgaben, die Sie schon in der Übung besprochen haben, dienen als Nachschlagewerk. Gelegentlich sind auch Resultate aus alten MafI-Aufgaben nützlich (oder notwendig) für die Lösung einer Aufgabe.

Stift(e) Wir empfehlen nur einen Kugelschreiber zu benutzen und (wenn überhaupt) Geschriebenes nur leicht durchstreichen. Alles was Sie aufschrieben sind ihre Ideen. Auch wenn Sie zwischendurch glauben, dass einige falsch sind und Sie das Geschriebene durchstreichen, wegkillern oder tipexen wollen, so streichen Sie es nur leicht durch, denn die Idee könnte sich doch als richtig herausstellen. Und wenn Ihnen klar wird, dass die Idee doch richtig ist, dann wollen Sie das Geschriebene auch noch lesen können.

Vergessen Sie farbiges unterstreichen und retuschieren, wie Sie es eventuell in der Schule gelernt haben, denn 1. interessiert es wirklich niemand, ob das schön ist was sie gerade aufschreiben, 2. farbige Stifte und Co bergen die Gefahr eines *Methodenoverhead* bei der Arbeit, der nur effizienzmindernd sein kann.[5] Das heißt nicht, dass Sie nicht mit Farben oder Markierungen arbeiten sollten. Aber wenn Sie mit Farben arbeiten, dann sollten Sie einen guten Grund dafür haben.[6]

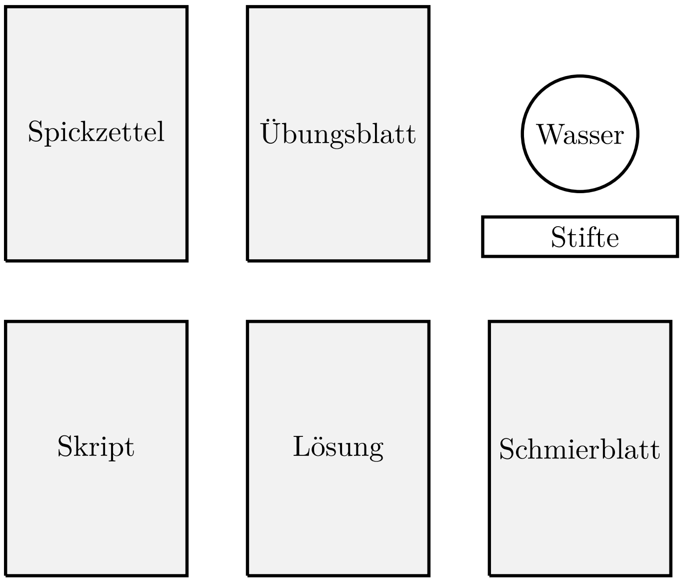

Abbildung 1.1: Vorschlag für den Aufbau vom Arbeitsplatz.

[5] Die resultierende Farbexplosion könnte Ihr Sehzentrum so sehr ablenken, dass Sie sich auf das Wichtigste nicht mehr konzentrieren können: Den Inhalt.

[6] Jede Farbe kann eine feste Bedeutung haben, z.B. rot-habe ich noch nicht verstanden, grün-besonders wichtig

1.4 Lernen in der Gruppe

Die optimale Gruppengröße liegt bei 2-4 Personen, um effektiv lernen zu können. Bei mehr Personen wird es zu unübersichtlich. Wenn Sie die Möglichkeit haben in der Gruppe zu lernen, dann sollten Sie die Chance nutzen.

Eine gut funktionierende Gruppe kann unserer Erfahrung nach einen großen Mehrwert haben. Man kommt gemeinsam auf Lösungen, die einem sonst nicht zugänglich wären. Auch werden Fehler eventuell schneller entdeckt. Allerdings braucht es viele Faktoren, damit es zu positiven Effekten kommt. Probleme die beim Gruppenlernen auftreten (können):

- Sie lernen nicht wirklich selber, sondern übernehmen einfach nur die Lösung ihrer Kommilitonen.
- Sie sind frustriert, weil der Rest der Gruppe Ihren nicht folgenden kann oder sie den anderen nicht folgen können.
- Ihr persönliches Lerntempo ist schneller/langsamer, als das der anderen Gruppenmitglieder.
- Die Organisation der Treffen kostet mehr Zeitaufwand, als es den Nutzen wert ist.
- Die Gruppe ist zu viel mit *Offtopic* (quatschen, kochen, ...) beschäftigt.

Wenn solche Probleme auftreten, müssen Sie Konsequenzen ziehen: Sie müssen die Probleme mit der Gruppe diskutieren. Es kann manchmal hilfreich sein mit der Gruppe eine Zeitplanung auszumachen oder abwechselnd jemanden zum Gruppenleiter zu erklären, der darauf achten muss, dass die Gruppe beim Thema bleibt. Hilft alles nichts, sollten sie die Gruppe verlassen.[7] Nicht alles kann man mit anderen zusammen lernen. Unserer Erfahrung nach eignet sich Lernen in der Gruppe am besten dazu, um über Definitionen und Zusammenhänge zu diskutieren. Wir weisen darauf hin, dass Gruppenlernen unserer Erfahrung nach nur effektiv sein kann, wenn sich jedes Gruppenmitgleid vorbereitet hat. Was in den meisten Fällen heißt, dass jedes Gruppenmitgleid bereits vor dem Treffen alleine gelernt hat.

[7] Das kann auch bedeuten, dass Sie mal einen guten Freund verprellen müssen.

2 Aufgaben lösen und Inhalte lernen

2.1 Lösen von Mathematik-Aufgaben

Im Folgenden beschreiben wir eine allgemeine sehr kleinschrittige Herangehensweise an eine mathematische Aufgabe. Wenn Sie Probleme bei der Bearbeitung der Mathematik-Aufgaben haben oder nicht wissen, wo Sie anfangen sollen, dann können diese Schritte Ihnen ein Leitfaden sein.

1. **Mathematische Begriffe heraus suchen:** Lesen sie die Aufgabenstellung (evtl. auch mehrmals) und schreiben Sie sich jede Formel und jeden mathematischen Begriff heraus.

2. **Mathematische Begriffe klären:** Suchen Sie im MafI 1 Skript alle Definitionen der in der Aufgabe genennten Begriffe heraus. Schreiben Sie diese Definitionen auf ein extra Blatt Papier, damit Sie die Definition nicht ständig nachschlagen müssen. Das selbe machen Sie für jeden Satz, der für die Bearbeitung der Aufgabe wichtig seien könnte. Wenn Sie sich nicht sicher sind, dann schreiben Sie alle Sätze und Lemmata auf, in denen ein Begriff aus der Aufgabenstellung auftaucht. Meiner Erfahrung nach vergisst man Definitionen oder Sätze oft kurz nach dem Lesen wieder, daher ist es sinnvoll sie ebenfalls auf einem seperaten Blatt aufzuschreiben.[1] Dabei kann es sein, dass in einer Definition oder einem Satz wieder neue Begriffe vorkommen, die Ihnen nicht sofort klar sind. Für diese sollten Sie ebenfalls die Definition aus dem Skript heraus suchen und abschreiben.

   Definition 2.1 (Körper)
   Ein Integritätsbereich $\langle R, \oplus, \odot\rangle$ heißt *Körper* genau dann, wenn $\langle R\backslash\{0\}, \odot\rangle$ eine kommutative Gruppe ist.

   Sie haben zum Beispiel die Definition für Körper im Skript gefunden und abgeschrieben, aber sie wissen nicht sofort was ein Integritätsbereich ist. Dann sollten Sie sich ebenfalls die Definition des Integritätsbereichs suchen und abschreiben.

3. **Definitionen und Sätze verstehen:** Nehmen Sie sich eine Minute, eine Stunde oder manchmal auch einige Tage Zeit und versuchen Sie zu verstehen, was die Definitionen und die Sätze aussagen. Eine Aufgabe zu bearbeiten, ohne verstanden zu haben, was die Begriffe bedeuten mit denen Sie arbeiten, führt meistens zu keinem befriedigenden

[1] Durch die Hand ins Gehirn.

Ergebnis und dauert wesentlich länger, als wenn Sie sich vorher die Bedeutung der Begriffe vergegenwärtigt haben. Durch Anwendung eines passenden Satzes kann die Lösung der Aufgabe auf wenige Zeilen schrumpfen.

4. **Formeln verstehen:** Sie haben bis jetzt allerhand Informationen zusammen getragen. Nun müssen Sie das in 1.-3. erworbene Wissen verwenden, um die Formeln zu interpretieren. Eventuell müssen Sie aber auch im Skript noch Informationen nachschlagen und abschreiben. Ein Beispiel dafür könnte ein Operator sein, dessen Bedeutung aus dem Kontext nicht sofort klar wird.

5. **Zusammenhang klar machen:** Nun haben Sie alles Handwerkszeug, was Sie brauchen, um sich zu erarbeiten, was in der Aufgabe von Ihnen verlangt wird. Verknüpfen Sie ihr in 1.-4. erworbenes Wissen, um sich klar zu machen, was Sie tun müssen, um die Aufgabe zu bearbeiten. Überprüfen Sie, ob und wie Sie die aufgeschriebenen Sätze, Lemmata und Korollare beim Lösen der Aufgabe einsetzen können.

6. **Aufgabentyp klären:** Es gibt verschiedene Aufgabentypen. Wenn Sie sich klar machen, welchen Aufgabentyp Sie vor sich liegen haben, wissen Sie auch wie Sie die Aufgabe bearbeiten müssen.

   a) **Rechenaufgabe** Eine typische Rechenaufgabe besteht aus einer Gleichung oder einem (linearen) Gleichungssystem, welche(s) nach einer oder mehreren Variablen aufgelöst werden soll.

   b) **Konstruktionsaufgabe** Einer Konstruktionsaufgabe liegt immer die Definition eines Objekts zugrunde, welches Sie konstruieren sollen. Dabei müssen die in der Definition genannten Eigenschaften auf das von ihnen konstruierte Objekt zutreffen. Ein Tipp: konstruieren Sie das Objekt so einfach wie möglich.

   c) **Eigenschaften nachweisen (kleiner Beweis)** Eine Konstruktionsaufgabe wird meistens von einer "Eigenschaften nachweisen-Aufgabe" verfolgt. In diesem Teil soll tatsächlich gezeigt werden, dass das von Ihnen konstruierte Objekt auch wirklich die in der Definition geforderten Eigenschaften besitzt. Wenn die geforderten Eigenschaften zu konfus wirken, prüfen Sie, ob es einen Satz gibt, der Ihnen einen alternativen Weg bietet. Z.B. um nachzuweisen, dass eine Vektormenge eine Basis ist, kann man entweder versuchen die Definition nachzurechnen oder mit Hilfe von Satz ... zeigen, dass die Vektoren linear unabhängig sind und sie ein Erzeugendensystem bilden.

   d) **Größere Beweise** Im Kapitel 3 werden verschiedene Beweistechniken wiederholt.

7. **Aufgabe bearbeiten:** Nun steht der Bearbeitung der Aufgabe nichts mehr im Wege.

2.2 Aufgaben lösen ist nur die halbe Miete

Unserer Erfahrung nach ist es ein großer Irrtum vieler Studenten, dass sie denken, dass das Durchrechnen der Übungszettel als Klausurvorbereitung reiche. Die Dozenten gehen aber davon aus, dass Sie sich auch mit den Verbindungen der einzelnen Themen auseinander setzen und mit Ihren Kommilitonen darüber diskutieren. Auch wenn Sie ohne diese Extraleistung die Klausur eventuell bestehen könnten[2], so werden Sie spätestens in den höheren Semestern auf Probleme stoßen, wenn Sie sich mit Materie auseinandersetzen müssen, die auf das Wissen aus MafI 1 aufbaut.[3]

Wenn es Ihr Zeitbudget erlaubt, lesen Sie das Skript und das Buch durch und versuchen Sie die Zusammenhänge zu verstehen (parallel zu den Aufgaben). Diskutieren Sie mit Ihren Kommilitonen! Niemand verlangt von Ihnen, dass Sie jeden Satz auswendig aufsagen können und das auch noch Jahre später. Einige grundlegende Zusammenhänge, wie der zwischen der Lösung eines Linearen Gleichungssystems und der Anzahl an Zeilen und Spalten oder zwischen der Basis und der Dimension eines Vektorraums, sollten Sie jedoch verstanden haben.[4]

In der Mathematik geht es darum das große Ganze zu sehen. Das soll heißen, versuchen Sie sich einen globalen Überblick über die Themen zu verschaffen. Wenn Sie diesen einmal gefunden haben, dann fällt es Ihnen leichter die Details zu verstehen. Den Überblick werden Sie unser Erfahrung nach leider erst nach mehrmaligem Durcharbeiten des Inhalts erhalten. Dies muss und darf auch nicht immer linear geschehen. **Mathematik ist Fleißarbeit!**

Die „mathematische Sprache“

Zunächst müssen Sie lernen die „mathematische Sprache“ zu übersetzen und später auch vorzulesen. Dies zu üben ist nötig, um mit dem *Standartvokabular* der Mathematik sicherer zu werden. Denn man kann eine Sprache nur sprechen, wenn man die Vokabeln beherrscht. Die Informationsdichte in mathematischen Texten ist um ein vielfaches höher, als in der Belletristik, da die Mathematik die oben beschriebene Kurzschreibweise verwendet.

[2] Wir garantieren hier für nichts!
[3] Oder Sie sich schlicht und einfach vor Ihrem Professor blamieren.
[4] Ein guter Akademiker weiß nicht alles, aber er weiß, wo es steht.

Betrachten wir nun als Beispiel die Aussage A:

$$\forall a, b \in V.\ (aRb) \Rightarrow (\exists c \in V.\ c \neq b \wedge aRc)$$

Die Aussage A lässt sich *übersetzen* zu (Formelähnlich):

`Für alle Elemente` a `und` b `aus` V `gilt: Wenn` a `in Relation zu` b `steht, so steht` a `auch in Relationen zu einem anderen Element` c `aus` V`, dass nicht` b `ist`

oder anders gesagt (Transferleistung):

`Es gibt kein Element in` V`, dass nur mit genau einem anderen Element in Relationen steht.`

Der Weg für das Verstehen von Sätzen und Definitionen

Um eine Definition zu verstehen, bringt es unserer Meinung nach nicht unbedingt etwas, mit einem Beispiel anzufangen.[5] Beginnen Sie mit der Definition. Lesen Sie diese mehrmals durch. Schlagen Sie Begriffe nach, die in der Definition vorkommen und die Sie nicht verstehen. Suchen Sie so rekursiv alle Definitionen raus, die Sie brauchen, um die Definition zu verstehen. Sollte es weitere Begriffe in der Definition geben, die Sie nicht verstehen, gucken Sie in unser Glossar auf Seite 23, in die MafI1 Skripte, ins Buch oder fragen Sie Kommilitonen. Sie können eine Definition nur verstehen, wenn Sie wissen was jedes Wort in der Definition bedeutet. Wenn Sie glauben „verstanden“ zu haben, was die Definition ausmacht, dann schauen Sie sich ein Beispiel aus dem Skript an, das der Definition entspricht. Versuchen Sie für dieses Beispiel die Eigenschaften der Definition nachzuweisen. Dadurch vertiefen Sie ihr Verständnis der Definition. Zusammenfassend ergibt das die folgenden sechs Schritte:

1. Definition mehrmals durchlesen
2. rekursiv alle unklaren Begriffe raus suchen
3. wissen was jedes Wort in der Definition bedeutet
4. Beispiel betrachten
5. Eigenschaften der Definition am Beispiel nachweisen
6. Verständnis der Definition vertiefen

Für das Verstehen von Sätzen empfehlen wir Ihnen die folgenden sechs Schritte:

1. Satz mehrmals durchlesen
2. rekursiv alle unklaren Begriffe raus suchen

[5] Sich auf Beispiele zu konzentrieren birgt unserer Meinung nach die Gefahr, dass man die Definition nicht wirklich „versteht“. Es kann sogar zu Verwirrung oder Fehlvorstellungen führen.

3. wissen was jedes Wort im Satz bedeutet
4. überlegen warum der Satz stimmt/ stimmen könnte (Intuition)
5. Beweis im Skript nachzuvollziehen (Schritt für Schritt)
6. Beweis im Anschluss noch einmal selbst führen (ohne abzuschreiben!)

Der Weg für das tiefere Verständnis von Definitionen

Beispiele sind gut dazu geeignet, um klassische oder bedeutende Fälle zu vermitteln oder auch um Ideen einzubringen, die sonst in der Vorlesung keinen Platz finden würden. Durch das Lesen der Beispiele kann man sein Verständnis der Definition selbst überprüfen. Der ideale Weg (der leider sehr (sehr, sehr) viel Erfahrung braucht) sollte sein: Erarbeiten Sie sich die Definition rekursiv, wie oben beschrieben. Haben Sie die Definition verstanden, dann versuchen Sie ein Objekt zu konstruieren, das der Definition entspricht. Versuchen Sie Beispiele aus ihrer Umwelt für die Definitionen zu finden, um eine anschauliche Intuition dafür zu bekommen, was die Definition aussagt.

3 Hintergrundwissen

Im Folgenden möchte wir gerne etwas Unterbau liefern, um mathematische Text besser verstehen und eventuell auch verfassen zu können. Wie in Kapitel 2 gilt, dass das hier Niedergeschriebene auf subjektiver Erfahrung der Autoren beruht und keines Falls Korrektheit (oder gar Vollständigkeit) beansprucht.

3.1 Mathematische Dokumente

Eine mathematische Schrift besteht üblicherweise aus Definitionen, Sätzen, Lemmata, Korollaren, eventuellen Beispielen und Text, der sich dazwischen befindet. Davon abzugrenzen ist die Sprache in der mathematische Aussagen getätigt werden. Diese ist neben etablierten Konventionen stark mit der Prädikatenlogik verknüpft (Siehe dazu MafI I Skript).

Definitionen legen möglichst präzise einen Begriff fest. Man sagt auch, dass der Begriff *wohldefiniert* ist, wenn das Objekt, so wie es definiert wurde, auch *existiert und eindeutig* ist. Nicht wohldefiniert wäre z.B. die Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto \frac{1}{2}$, da diese eine natürliche Zahl nicht in den Wertebereich abbildet (Verletzung der Existenz).

Sätze sind mathematische Resultate. Üblicherweise enthält ein Satz genau ein Resultat gefolgt vom Beweis zu diesem Resultat.

- **Theoreme** werden von (manchen) Mathematikern verwendet, um ein wichtiges Resultat hervorzuheben.[1] Andere Mathematiker verwenden den Begriff Theorem synonym zu Satz.

- **Lemmata** sind Sätze, die nicht Gegenstand der Abhandlung sind, sondern nur erwähnt werden, um in einem späteren Beweis unterstützend genutzt zu werden. Lemmata werden deshalb auch manchmal (verbal) Hilfssätze genannt.

- **Korollare** sind (nahezu) offensichtliche Resulate, die aus einer Definition oder einem Satz „direkt“ folgenden. Ein Beweis dazu ist die Schreibarbeit fast nicht wert.

[1] Wenn ich mal groß bin, werde ich auch ein Theorem!

3.2 Wie ein Beweis aufzuschreiben ist

1. Das zu beweisende Resultat aufschreiben.
   Zunächst soll der Leser darüber informiert werden, was wir im Folgenden beweisen.

   `Wir beweisen nun, dass für jedes` $x \in \mathbb{Z}$ `ein` $y \in \mathbb{Q}$ `existiert, so dass` $x \cdot y = 1$ `gilt.`

2. Die Beweistechnik angeben.
   Der Leser soll darauf vorbereitet werden, welche Beweistechnik wir anwenden (siehe dazu auch den Abschnitt 3.3 über Beweistechniken). Generell sind meist mehrere Beweistechniken zur Lösung eines Problems geeignet.

   `Dazu werden wir einen direkten Beweis durchführen.`

3. Die mathematischen Objekte angeben.

   `Sei` $x \in \mathbb{Z}$ `beliebig. Wähle` $y = \ldots$ `.`

4. Anwenden der Beweistechnik auf die Objekte.
   Wir können nun mit dem eigentlichen Beweis beginnen. Dazu versuchen wir eine möglichst nachvollziehbare Argumentation aufzubauen. Dabei ist zu beachten, dass diese nicht zu grobschrittig ist. Große Gedankensprünge erwecken den Eindruck, als wenn die Lösung vom "Himmel" fallen würde. Aber auch nicht zu kleinschrittig. Es könnte den Leser langweilen oder überfordern. Niemand möchte bei einem Beweis zur Gaussischen Summe nochmal erwähnt haben, dass die Addition auf den natürlichen Zahlen kommutativ ist. Die **eigene** Intution ist da der besten Maßstab und die wird durch üben immer besser werden.

   `Wir wollen zeigen, dass` $x \cdot y = 1$ `gilt.`
   `Formen wir die Gleichung um, so erhalten wir` $y = \frac{1}{x}$`. Tragen wir nun oben ein, dass wir` $y = \frac{1}{x}$ `wählen, so ergibt sich:`
   $x \cdot y = x \cdot \frac{1}{x} = 1$.
   `Somit ist die Aussage bewiesen.`

3.3 Beweistechniken

Beweistechniken sind Verfahren, bei denen nachgewiesen wurde, dass sie bei korrekter Anwendung ein wahres Resultat hervorbringen. Im Folgenden sind die gängigen Beweistechniken kurz beschrieben. Eine detaillierte Einführung und Erklärung finden sich in dem Buch *Grundlagen der höheren Informatik* von Prof. Bernhard Steffen.[2]

Behauptungen werden bewiesen. Annahmen werden wiederlegt.

[2] Bernhard Steffen, Oliver Rüthing, Malte Isberner, Grundlagen der höheren Informatik in Springer Vieweg, Berlin, 2014

Direkter Beweis (Buch: S. 28, 56)

In einem direkten Beweis beweisen wir die zu beweisende Aussage ohne Umwege. Hierbei gibt es für quantifizierte Aussagen eine meist eindeutige Vorgehensweise, wie man die Aussage abarbeiten kann:

Allquantoren: Beginnt eine Aussage mit einem Allquantor (z.B. $\forall x \in \mathbb{Z}$), so beginnen wir unseren Beweis mit `"Sei X beliebig gewählt"`. Das X ersetzten wir durch die Aussage, die von dem Allquantor gebunden wird. Im Beispiel: `Sei` $x \in \mathbb{Z}$ `beliebig gewählt.`

Existenzquantor: Beginnt eine Aussage mit einem Existenzquantor (z.B. $\exists y \in \mathbb{N}$), so beginnen wir unseren Beweis mit `"Wähle` $y = \ldots$ `"`. Die quantifizierte Variable oder Menge sollte so gewählt werden, dass der restliche Beweis (das was dahinter steht) leicht zu lösen ist. Der Trick ist, dass man zunächst eine Lücke hinter dem Gleichheitszeichen lässt und später guckt, wie man y wählen muss, damit der Rest aufgeht. Im Beispiel: `Wähle` $y = 1$`.`

Verschachtelung von Quantoren: Beinhaltet eine Aussage mehrere Quantoren, so ist die Reihenfolge in der sie auftreten wichtig. Allquantoren werden immer gleich behandelt. Bei Existenzquantoren beeinflussen vorhergehende Allquantoren jedoch die Wahl der Variable oder Menge. Beginnt unsere Aussage zum Beispiel mit $\forall x \in \mathbb{Z}\ \exists y \in \mathbb{N}$, so beginnen wir unseren Beweis wie folgt: `"Sei` $x \in \mathbb{Z}$ `beliebig gewählt und wähle` $y = \frac{1}{x}$`."` In wie fern y von x abhängt, können wir wie oben beschrieben erst gegen Ende des Beweises feststellen. In manchen Beweisen wird y mit $y(x)$ bezeichnet, um klar zu machen, dass y in Abhängigkeit von x gewählt werden muss.

Beweis durch Widerspruch (Buch: S. 67)

Beim Beweis durch Widerspruch beweisen wir, dass das Gegenteil des zu Beweisenden nicht gelten kann. Daraus folgt direkt, dass die Aussage wahr ist.

Indirekter Beweis

Wir wollen die Aussage A beweisen und wir wissen aus einem Satz, dass für eine andere Aussage B gilt: $B \Rightarrow A$. Also können wir, um A zu beweisen, auch zeigen, dass B gilt, und den zuvor genannten Satz anwenden. Da wir A nicht direkt bewiesen haben, sondern nur gezeigt haben, dass B gilt, haben wir einen indirekten Beweis geführt.

Beweis durch Kontraposition (Buch: S. 55)

Wollen wir eine Aussage der Form $A \Rightarrow B$ beweisen, so können wir alternativ auch zeigen, dass $\neg B \Rightarrow \neg A$ gilt. Der Grund ist logischer Natur:

$$\begin{aligned} A \Rightarrow B \equiv & \quad \neg A \vee B \\ \equiv & \quad B \vee \neg A \\ \equiv & \quad \neg\neg B \vee \neg A \\ \equiv & \quad \neg B \Rightarrow \neg A \end{aligned}$$

Beweis durch Induktion (Buch: S. 124, 129, 131, 145)

Es gibt verschiedene Arten der Induktion: vollständige Induktion, strukturelle Induktion, verallgemeinerte Induktion und noethersche Induktion. Für das Informatik Studium sind besonders die vollständige und die strukturelle Induktion wichtig.

Induktionsbeweise behandeln meistens allquantifizierte Aussagen über die natürlichen Zahlen. Da das Induktionsprinzip sich die Struktur der natürlichen Zahlen zunutze macht, funktioniert Induktion nur über die natürlichen Zahlen[3] - jedoch <u>nicht</u> über $\mathbb{R}$! Ein Beispiel für eine Aussage, die per vollständige Induktion bewiesen wird, lautet: `für alle` $n \in \mathbb{N}$ `gilt: die Summe von 1 bis n beträgt` $\frac{n(n+1)}{2}$.

Strukturelle Induktion findet bei Aussagen über Strukturen (z.B. Bäumen) seine Anwendung. Ein Beispiel für eine Aussage, die per strukturelle Induktion bewiesen wird, lautet: `Ein Baum der Tiefe n hat maximal` 2^n `Knoten.`

Beweis durch Gegenbeispiel

Um zu beweisen, dass etwas <u>nicht</u> gilt, versucht man ein Gegenbeispiel zu finden. Dies wird ins Besondere bei Allaussage verwendet. Betrachten wir die folgende Aussage: `für alle` $n \in \mathbb{N}$ `gilt` $n \leq 5$. Diese Aussage ist falsch. Das können wir nur durch ein Gegenbeispiel beweisen, denn für $n = 6$ ist die Aussage $n \leq 5$ offensichtlich falsch. Dann kann die Aussage aber nicht für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten, da $6 \in \mathbb{N}$ gilt.

WICHTIG: Es gibt <u>keinen</u> Beweis durch Beispiel! Durch ein Beispiel kann man keine Allquantifizierte Aussage beweisen. Man kann sie nur durch ein Gegenbeispiel widerlegen.

[3] und verwandte Zahlenbereiche wie $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$

Glossar

Abgeschlossenheit

Eine Menge M ist abgeschlossen bezüglich einer oder mehrerer Operationen, wenn das Resultat der Operation für jedes Element aus M wieder in M liegt. Sei $M = \{0, 1\}$ eine Menge und $f_1 : M \times M \to M$, $(x, y) \mapsto x \cdot y$ und $f_2 : M \times M \to M$, $(x, y) \mapsto x + y$ zwei Funktionen. Dann ist M unter f_1 abschlossen, aber nicht unter f_2, da $1 + 1 = 2 \notin M$ gilt.

Abschluss

Der Abschluss einer Menge A bezüglich einer Operation oder Eigenschaft ist die kleinste Obermenge H von A, so das H unter allen Operationen abgeschlossen ist. Siehe auch Abgeschlossenheit.

Analog

Wird oft verwendet, um deutlich zu machen, dass ein Beweis (bis auf technische Details) ähnlich verläuft, wie ein vorheriger.

Für fast alle

Für fast alle Elemente aus M gilt A wird dafür verwendet, um kenntlich zu machen, dass in der unendlichen Menge M nur für endlich viele Elemente A gilt.

gdw

Abkürzung für *genau dann wenn*. Siehe auch genau dann wenn.

genau dann wenn

Setzt zwei Aussagen A und B logisch in Bezug zueinander. Ist die Aussage A wahr, so muss auch die Aussage B wahr sein. Zusätzlich muss, wenn die Aussage B wahr ist, auch die Aussage A wahr sein. Damit kann man A *gdw.* B als Kurzschreibweise für *aus A folgt B und aus B folgt A* verstehen.

iff

iff steht für *if and only if*. Die angelsächsische Form von genau dann wenn. Siehe auch genau dann wenn.

Insbesondere

Wird verwendet, um hervorzuheben, dass das genannte Objekt auch die genannte Eigenschaft hat.

paarweise verschieden

Meint, dass keiner der verschieden ausgewählten Elemente einem anderen gleicht. Z.B. meint *Seien* $x_1, \ldots, x_3$ *paarweise verschieden...*, dass es keine zwei Indizes i, j $(i \neq j)$ gibt, so dass $x_i = x_j$. Anders ausgedrückt: $x_1 \neq x_2$, $x_1 \neq x_3$ und $x_2 \neq x_3$.

trivial

Man spricht oft von trivial Fällen oder trivialen Lösungen, wenn diese mehr oder weniger offensichtlich sind. In einigen Teilgebieten der Mathematik hat der Begriff trivial eine feste Bedeutung. Z.B. werden in der linearen Algebra $\{\vec{0}\}$ und V als die *trivialen* Untervektorräume von V bezeichnet.

$\in$

$\in$ lässt sich am besten mit *ist Element von* übersetzen. $a \in M$ steht dafür, dass a ein Element der Menge M ist.

$\mapsto$

Das $x \mapsto y$ steht für x *wird abgebildet auf* y. Es kommt im Zusammenhang mit der Definition von Funktionen vor. Z.B. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 + 1$. Dabei ist die Schreibweise $x \mapsto x^2 + 1$ äquivalent zu $f(x) = x^2 + 1$.

$\to$

Das $\to$ Symbol wird zumeinst bei der Definition von Funktionen verwendet. Dabei meint $f : A \to B$, dass f eine Funktion ist, die Elemente aus der Menge A (Definitionsbereich) auf Elemente aus der Menge B (Wertebereich) abbildet.